Ministerio de Educación

VII OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2010)

Sociedad Matemática Peruana

Segunda Fase - Nivel 2

20 de agosto de 2010

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.

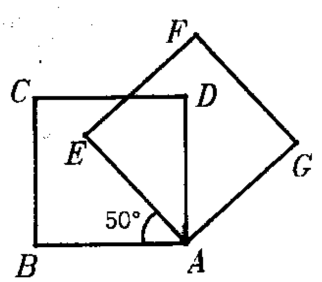
ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Andrés, Daniel, Luis y José son postulantes a la Magistratura. Cada uno de ellos nació en una provincia distinta: Oxapampa, Callao, Lima o Trujillo. Sus edades son distintas: 52, 55, 58 y 61 años. Daniel es de Oxapampa y nació 3 años antes que Andrés, quien tiene 52 años. José no tiene 58 años y no es de Lima ni del Callao. El que tiene 58 años es de Lima. ¿Cuál es la edad del que nació en el Callao?

2. Si $a \nabla b = \dfrac{a^2+b}{2}$. Calcula el mayor valor que puede tomar x en la siguiente ecuación:
$$1 \nabla 2 + 2 \nabla 3 + 3 \nabla 4 = 2 \nabla (x \nabla 2).$$

3. Sea $S(n)$ la suma de todos los dígitos de n, y $P(n)$ el producto de todos los dígitos de n. Por ejemplo, $S(124) = 7$ y $P(35) = 15$. Encuentra todos los números n de dos dígitos, tales que $P(n) + S(n) = n$. Escribe como respuesta la suma de todos esos números n .

4. En la siguiente figura se muestran los cuadrados $ABCD$ y $AEFG$ tales que $AB = AG$. Si $\angle EAB = 50°$, calcula la medida de $\angle FCD + \angle DGA$ (en grados sexagesimales).



5. Sea $N = 9 + 99 + 999 + 9999 + \cdots + \underbrace{999\ldots99}_{2009 \text{ veces}}$. ¿Cuántas veces aparecerá el dígito 1 en el número N?

6. Determina el menor entero positivo M que cumple las siguientes condiciones a la vez:
   - $M > 2010$.
   - Todos los dígitos de M son mayores que cero y diferentes entre sí.
   - M es múltiplo de 12.

7. En cada una de las caras (anverso y reverso) de dos tarjetas de cartón se ha escrito un número, de tal forma que los cuatro números son distintos. Zoila lanzó las tarjetas al aire y cuando cayeron a la mesa, notó que la suma de los números que quedaron visibles fue 36, luego, sus amigas Lucía, Camila y María repitieron el mismo proceso pero obtuvieron los resultados: 41, 50 y 55, respectivamente. Si los números que vió María fueron:

   $$\boxed{25} \quad \boxed{30}$$

   Calcula la diferencia de los números que vió Lucía.

8. Tengo diez tarjetas, en cada una está escrito uno de los siguientes números (sin repetir):

   $$1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad 21 \quad 28 \quad 36 \quad 45 \quad 55.$$

   Si las diez tarjetas se introducen en una bolsa negra, ¿cuál es el mínimo número de tarjetas que debo sacar, sin ver, para tener la seguridad de que entre las tarjetas que saqué hay dos cuya suma sea un cuadrado perfecto?

9. Consideremos todos los polinomios $P(x)$ de grado 2 con coeficientes en el conjunto $\{-2, -1, 1, 2\}$. ¿Cuántos de estos polinomios satisfacen la desigualdad:

   $$P(x + y) \geq P(x) + P(y),$$

   para todos los números reales positivos x, y?

10. Sean a y b números reales positivos tales que : $a^3 - 3ab^2 = 36\sqrt{2}$ y $b^3 - 3ba^2 = -52\sqrt{2}$. Halla el valor de $a^2 + b^2$.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN

Ministerio de Educación

VII Olimpiada Nacional Escolar de Matemática
(ONEM 2010)

Sociedad Matemática Peruana

Segunda Fase - Nivel 3

20 de agosto de 2010

- La prueba tiene una duración máxima de 2 horas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Utiliza solamente los espacios en blanco y los reversos de las hojas de esta prueba para realizar tus cálculos.
- Entrega solamente tu hoja de respuestas tan pronto consideres que has terminado con la prueba. En caso de empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Puedes llevarte las hojas con los enunciados de las preguntas.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Ana y Beto van desde el punto P hasta el punto Q de dos maneras distintas. Ana camina 6 pasos hacia el oeste y cinco pasos hacia el norte. Beto camina 1 paso hacia el norte, 2 pasos hacia el oeste, 3 pasos hacia el sur, 4 pasos hacia el este, 5 pasos hacia el norte, y así sucesivamente, hasta llegar al punto Q. ¿Cuántos pasos dió Beto en total?

2. Se tiene un triángulo equilátero y un hexágono regular. El perímetro del hexágono regular es igual a 30 veces el lado del triángulo equilátero. Si dividimos el área del hexágono entre el área del triángulo, ¿qué número obtenemos?

3. Se sabe que la siguiente ecuación tiene exactamente dos raíces reales distintas x_1 y x_2:
$$\frac{36^x + 36}{20} = 6^x.$$
Calcula $10(x_1 + x_2)$.

4. Se escribe una lista ordenada con todos los números de 4 dígitos que están formados solamente con dígitos impares, de la siguiente forma:
$$1111, 1113, 1115, 1117, 1119, 1131, \ldots.$$
El número 1111 está en el lugar 1, el número 1113 está en el lugar 2, y así sucesivamente. ¿Qué número está en el lugar 128?

5. Sea ABC un triángulo y M el punto medio del lado BC. Si se cumple que $AB = 10\sqrt{2}$, $tan(\angle BAM) = \frac{3}{4}$ y $tan(\angle MAC) = 1$. Calcula la longitud del segmento AC.

6. Jesús dice un número entero positivo. Tomás multiplica el número de Jesús por 2 y le suma 6, luego, extrae la raíz cuadrada y obtiene un número entero. Amilcar en cambio le resta 1 al número de Jesús y luego, le extrae la raíz cuadrada y obtiene también un número entero. Si el número que obtuvo Tomás es 6 unidades mayor que el número que obtuvo Amilcar. ¿Cuál es el número que dijo Jesús?

7. Hay n niños y una caja con m caramelos. El primer niño coge 1 caramelo más la décima parte de los restantes, el segundo niño coge 2 caramelos más la décima parte de los restantes, y así sucesivamente hasta que el n-ésimo niño coge n caramelos. Si todos los niños cogieron la misma cantidad de caramelos. Determina el valor de $m + n$.

8. Calcula el resto de dividir entre 111 el número $11^{600} + 11^{598} + 11^{596} + 11^{594} + \cdots + 11^2 + 11^0$.

9. Sea ABC un triángulo con $\angle A = 10°$, $\angle B = 140°$, $\angle C = 30°$. Sobre la bisectriz interior del ángulo B se toma un punto P, distinto de B, de tal manera que $AB = AP$ (P está en la región exterior al triángulo ABC). Halla la medida del ángulo $\angle BPC$ en grados sexagesimales.

10. En una mesa redonda se sientan 9 personas, cada una tiene en su mano una carta con alguno de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Todas las personas tienen números distintos en sus cartas. Luego, cada persona escribe en un papel la suma de su número con los números de sus dos vecinos; finalmente, se escoge M, el mayor de los 9 números escritos. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar M?

    Aclaración. Cada persona tiene dos vecinos, el que se sienta a su izquierda y el que se sienta a su derecha.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN