UGEL 03 – SUB CAFAE

ANÁLISIS COMBINATORIO
PROBABILIDADES

Profesor : Ángel Marca Huamán
UNMSM

ANÁLISIS COMBINATORIO

PRINCIPIOS BÁSICOS DEL PROCESO DE CONTAR:

- **Teorema 1: (Principio de multiplicación)**: Sean $S=\{a_1;a_2;...;a_m\}$ un conjunto de "m" elementos y $T=\{b_1;b_2;...;b_n\}$ un conjunto de "n" elementos, el número de pares $(a_j;b_k)$ que pueden ser formados tomando un elemento de S y un elemento de T es: "nm".

Ejemplo:

Cuatro universidades desean contratar los servicios de un empleado para cada una de las áreas: Biblioteca, mantenimiento y personal. ¿Cuántas oportunidades de trabajo se presentan?

Ejemplo:

Para ir de la ciudad “A” a la ciudad “C” existen tres caminos diferentes y de la ciudad “B” a la ciudad “C” hay cinco caminos diferentes. ¿De cuántas formas diferentes se podrá ir desde “A” hasta “C” pasando necesariamente por “B”?.

- **Teorema 2: (Agrupamiento múltiples)**: Sean $S_1=\{a_1;a_2;...;a_{n1}\}$ un conjunto de "n1" elementos, $S_2=\{b_1;b_2;...;b_{n2}\}$ un conjunto de "n2" elementos, ..., $Sr=\{x_1;x_2;...;x_{nr}\}$ un conjunto de "nr" elementos entonces es posible formar: : $n=n_1 x n_2 x ... x nr$ grupos ordenados con r elementos cada uno de la forma: $(a_{j1};b_{j2};...;x_{jr})$, donde a_{j1} es un elemento de S_1; b_{j2} es un elemento de S_2;...; x_{jr} es un elemento de Sr.

Ejemplo: Un conductor de automóvil puede tomar cualquiera de las tres rutas para ir de la ciudad “A” hasta la ciudad “B”, estando en “B” puede tomar cualquiera de las cinco rutas para ir de la ciudad “B” a la ciudad “C”, finalmente estando en “C” puede tomar cualquiera de las dos rutas para ir de la ciudad “C” a la ciudad “D”. ¿De cuántas formas diferentes podrá ir desde “A” hasta “D” pasando por “B” y “C”.

- ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 2; 4; 6; 9? (No se permiten repeticiones de cifras)

- **Teorema 3: (Principio de Adición)**: Si dos decisiones son mutuamente excluyentes y la primera se puede tomar de "m" maneras y la segunda de "n" maneras una o la otra se pueden tomar de "m+n" maneras.

Ejemplo:

- Un estudiante debe viajar a la ciudad “A” o a la ciudad “B”. Para ir a la ciudad “A” existen cuatro caminos diferentes y para ir a la ciudad “B” existen cinco caminos diferentes.¿De cuántas formas diferentes podrá realizar el viaje?

- Para ir de la ciudad “P” a la ciudad “Q” hay tres caminos diferentes, para ir de la ciudad “Q” a la ciudad “R” hay dos caminos diferentes y para ir de la ciudad “P” a la ciudad “R” hay tres caminos diferentes. ¿De cuántas formas se podrá ir de “P” a “R”?

ARREGLOS:

- **ARREGLO SIMPLE:** Un arreglo simple de “n” objetos diferentes tomados de “k” en “k” es una ordenación de “k” objetos entre los “n” dados, de tal modo que estos grupos difieren en algún elemento o en su ordenación.

- **Teorema 4:** El número de todos los arreglos a formarse con "n" objetos tomados de "k" en "k" es obtenida por la fórmula:

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

Ejemplo:

¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar ocho personas en una banca con capacidad para cinco personas?

- **ARREGLO CON REPETICIÓN:** Son aquellos arreglos en que cualquiera de sus elementos puede repetirse en el mismo grupo, el número de veces que se indique.

- **Teorema 5:** El número de todos los arreglos con repetición a formarse con "n" objetos tomados de "k" en "k" es obtenida por la fórmula:

$$AR_{k}^{n} = n^{k}$$

Ejemplo:

El Ministerio de transporte desea determinar la numeración para placas de matrícula de automóviles compuesto por dos letras y dos números. ¿Cuántas placas diferentes se podrán construir?

- Para el ejemplo anterior: si las placas están compuestas por dos letras y cuatro números. ¿Cuántas placas diferentes se podrán fabricar?

PERMUTACIONES:

- **PERMUTACIÓN SIMPLE:** Son los diferentes grupos que pueden formarse con los “n” objetos dados de modo que intervengan todos los elementos en cada grupo y cuya diferencia está dada en el orden de colocación.

- **Teorema 6:** El número de permutaciones distintas que pueden formarse con "n" objetos se obtiene mediante la fórmula:

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$$

- ¿De cuántas maneras diferentes se podrán sentar cuatro personas en cuatro asientos?

- ¿De cuántas maneras podemos ordenar en una fila a cinco alumnos de un salón de clase?

- ¿Cuántas ordenaciones lineales distintas pueden formarse con todas las letras de la palabra permuta?

- ¿De un conjunto de tres alumnos, se desea formar una junta directiva integrada por un presidente, un secretario y un tesorero. Cuántas directivas diferentes pueden formarse?

- **PERMUTACIÓN CIRCULAR:** Son las diferentes permutaciones que se pueden hacer con “n” objetos dados, de modo que no hay ni primero ni último pues todos se hallas formando una circunferencia.
  Teorema 7: El número de permutaciones circulares que pueden formarse con “n” objetos se obtiene mediante la fórmula:

$$P_n^C = n-1\,!$$

Ejemplo:

- ¿De cuántas maneras diferentes, se podrán sentar cuatro personas alrededor de una mesa circular?

- De cuántas formas diferentes, se pueden sentar siete personas alrededor de una fogata si Juan y Carmen deben estar siempre juntos?

- **PERMUTACIÓN CON REPETICIÓN:**
- **Teorema 8:** Sean k1;k2;...;km números enteros positivos tal que k1+k2+...+km=n El número de permutaciones con repetición se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$P_n^{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_m!}$$

Ejemplo:

- ¿Cuántas permutaciones se pueden hacer usando las letras de la palabra MEMMER?

- ¿Cuántas permutaciones se pueden hacer usando las letras de la palabra ARREGLO?

- ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar 3 bolas blancas, 4 rojas y 5 negras en una fila, si las bolas de igual color no se distinguen entre sí?

- Se tienen ocho vasos diferentes; cinco de los cuales deben ser llenados con vino y los tres restantes con chicha. ¿De cuántas maneras diferentes se puede realizar el llenado?

- **COMBINACIONES:** Una combinación de “n” objetos tomados de k en k es una selección de k objetos sin tener en cuenta la ordenación de los mismos.

- **Teorema 9:** El número de combinaciones distintas que pueden formarse con “n” objetos tomados de k en k se calcula con la fórmula:

$$C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ejemplo:

Cuántos grupos de tres alumnos se podrán formar en la clase de estadística de 21 alumnos?

- En la clase de estadística hay 21 alumnos ....mujeres y ....hombres. ¿Cuántos grupos de tres personas se podrán formar si dos de ellas deben ser mujeres?

- En la clase de estadística hay 21 alumnos ....mujeres y ....hombres. ¿Cuántos grupos de tres personas se podrán formar si dos de ellas deben ser hombres?

PROBABILIDADES

EXPERIMENTO ALEATORIO

- Es aquel experimento en el cual las condiciones bajo las cuales se verifica no determinan el resultado del mismo

Ejemplo:

Cuando lanzamos un dado al azar, no podemos determinar cual es el puntaje que hemos de obtener, sólo podemos determinar su distribución probabilística, es decir sólo podemos indicar que obtendremos uno de los siguientes puntos: 1,2,3,4,5 o 6; luego, este experimento de lanzar el dado es aleatorio.

ESPACIO MUESTRAL (Ω)

Con cada experimento aleatorio definimos el espacio muestral Ω, cuyos elementos son todos los resultados posibles del experimento aleatorio. Al cardinal de Ω, es decir al número de elementos de Ω será el número de casos posibles y lo denotaremos por CP

$$CP = n(\Omega)$$

- Ejemplo:
- Ω={x/x es puntaje obtenido al lanzar un dado}
- CP=……………..
- Ω={x/x es una bola blanca o una bola roja}
- CP=……………..

EVENTO O SUCESO(A)

- Un suceso A (respecto a un espacio muestral particular S asociado con un experimento aleatorio E) es cualquier subconjunto A del espacio muestral **Ω**. Al cardinal de A llamaremos número de casos favorables y lo denotaremos por CF tal que: CF=n(A)

PROBABILIDAD P(A)

- Sea E un experimento aleatorio. Sea S un espacio muestral asociado con E. Con cada suceso A asociamos un número real, designado por P(A) y llamado la **probabilidad de A,** que satisface la siguiente relación:
- Donde **$0 \leq P(A) \leq 1$**
- **$P(\Omega) = 1$**
- **$P(\emptyset) = 0$**

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{número de casos favorables (CF)}{número de casos posibles (CP)}$$

Ejemplo:

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un valor impar al lanzar un dado?

- Una caja tiene 50 botellas de vidrio de las cuales 20 son defectuosas, ¿cuál es la probabilidad que al sacar una muestra de 3 botellas las tres sean defectuosas?

SUCESOS SIMPLES

- Es aquel cuya ocurrencia o no ocurrencia no está relacionada con ningún otro suceso.

  Ejemplo:

  Una moneda se lanza siete veces , calcular la probabilidad que aparezcan exactamente 4 caras.

- Calcular la probabilidad de obtener una suma de por lo menos 10 puntos al lanzar dos dados

SUCESOS COMPUESTOS

- Es la ocurrencia de dos o más sucesos simples , además un suceso compuesto puede clasificarse en tres tipos:

- - Sucesos mutuamente excluyentes.
- - Sucesos independientes.
- - Sucesos dependientes.

Sucesos mutuamente excluyentes

- Los sucesos A y B son mutuamente excluyentes si no pueden suceder a la vez

$$A \cap B = \emptyset$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ejemplo:

- ¿Cuál es la probabilidad de extraer de un juego de naipes un as o rey?

Sucesos Compatibles

- Si A y B son eventos no excluyentes , se dice que son compatibles cuando en una misma prueba pueden ocurrir ambos a la vez , es decir

$$A \cap B \neq \emptyset$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ejemplo:

Una caja tiene 30 bolas numeradas del 1 al 30 ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar al azar una bola , resulte par o múltiplo de 5?

Sucesos Independientes

- Dados dos sucesos A y B de un espacio muestral Ω, se dice que dos sucesos son independientes uno del otro en relación con un cierto experimento aleatorio , si el acontecer de uno de ellos no está, en modo alguno,relacionado con el acontecer del otro ; es decir : la ocurrencia del evento A no afecta al hecho de que ocurra , simultánea o sucesivamente, el evento B.
- Cuando dos eventos a y B son independientes entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) x P(B)$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

- Es un caso particular de probabilidaddonde se calcula la probabilidad de un suceso B, sabiendo que ya ocurrió el suceso A , del cual depende el suceso B.
- Notación P(B/A)

  Donde P(A)>0

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ejemplo:

- Se extrae un b olo de un total de 10 (los bolos están enumerados del 1 al 10)
- ¿Cuál es la probabilidad que dicho bolo sea múltiplo de 3, si se sabe que fue par?

Ejemplo

- Se lanza dos veces una moneda ; ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos veces cara?

GRACIAS